On considère la série de fonctions sur $\mathbb{R}$: $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$

Etudier a) la convergence simple

b) la convergence uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

c) la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

(tiré. examen DeugA 2e année, Analyse, juin 79 à Nice)

---

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\sin \frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ et la convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{|x|}{n^2}$ assurent la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $x \in [a,b]$ et si $M = \mathrm{Sup}(|a|, |b|)$, $\left|\sin \frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$ montre la convergence normale (et donc uniforme) de $\sum \sin \frac{x}{n^2}$ sur $[a,b]$.

c) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2} - \sum_{n=0}^{N} \sin \frac{x}{n^2} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2} \right| \geq 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, puisqu'il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{2}(N+1)^2$ pour avoir $\sin \frac{x}{(N+1)^2} = 1$ et $\sin \frac{x}{n^2} = \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{N+1}{n}\right)^2 \geq 0$ pour tout $n > N+1$.

Ainsi $\sum_{n\geq 0} \sin \frac{x}{n^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ en entier.

On considère la série de fonctions

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \qquad \text{où} \qquad u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

a) Trouver le domaine de définition de u, et préciser certains intervalles où $u(x)$ converge uniformément.

~~b) Y a t'il convergence uniforme de $u(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$~~ ?

b) Donner un équivalent de $u(x)$ quand x tend vers 0. On pourra comparer $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt$.

---

a) Si $a>0$ est fixé, pour $x \geq a$:

$$e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y aura donc convergence normale de $u(x)$ pour $x \geq a$, donc uniforme sur $[a,+\infty[$. Ceci pour tout $a>0$. f sera donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x=0$, $u_n(x)=1$ $\forall n$ et $\sum u_n$ diverge

Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ et $\sum u_n$ diverge

~~b) S'il y avait convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait~~

b) Si $x>0$ et $t\in[n,n+1]$, on a $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{n}}$, puis

$$u(x) - 1 \leq \int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq u(x)$$

(Hallak et Kallal)

$$\int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\infty} s\,e^{-xs}\,ds = 2\left(\left[s\,\frac{e^{-xs}}{-x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-xs}}{-x}\,ds \right)$$

$$= \frac{2}{x}\int_0^{\infty} e^{-xs}\,ds = \frac{2}{x^2}$$

Soit $\frac{2}{x^2} \leqslant u(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}$.

Concluons : $\boxed{u(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}}$

Mq la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas normalement convergente.

$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n}$ assure la divergence de $\sum \left\|\frac{(-1)^n}{n+x}\right\|_\infty$.

La "règle d'Abel uniforme" s'applique à la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x} = 0$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}_+$ (En effet : $\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{1}{n+x}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$)

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément. (Voir NB2))

CQFD

NB : 1) Preuve de la règle d'Abel Uniforme

Th : a_n, b_n fcts de $E \to \mathbb{C}$.

Si 1) $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est uniformément bornée (ie $\exists B \quad \sup_{x\in E} |B_n(x)| \leq B$)

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = 0$ uniformément pour $x \in E$

3) $(a_n(x))_n$ décroît pour tt x (ainsi $a_n(x) \in \mathbb{R}_+$)

Alors $\sum a_n b_n$ est uniformément convergente sur E.

preuve : On utilise la transformation d'Abel

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

* $(a_N B_N)_N$ convergera uniformément vers 0 puisque

$$\forall x\in E \quad |a_N(x) B_N(x)| \leq B\,|a_N(x)|$$

où $a_N \to 0$ uniformément

* Il reste à prouver que $\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$ converge uniformément. Pour cela, on utilise le Critère de Cauchy Uniforme :

(Hallal & Kallal, adapté)

$$\forall x \in E \quad \left| \sum_{n=p}^{q} (a_n - a_{n+1}) B_n \right| \leq B \sum_{n=p}^{q} (a_n(x) - a_{n+1}(x))$$

$$\leq B \, (a_p(x) - a_{q+1}(x))$$

$$\leq B \, a_p(x)$$

et la convergence uniforme de $a_p(x)$ vers 0 pour $p \to +\infty$ montre que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \qquad q \geq p > P \Rightarrow \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=p}^{q} (a_n - a_{n+1}) B_n \right| \leq \varepsilon$$

CQFD

NB 2) : Résoudre cet exercice sans utiliser la règle d'Abel Uniforme.
On utilise la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

avec $a_n = \frac{1}{n+x}$ et $b_n = (-1)^n$.

$$\sum_{n=0}^{N} b_n \doteq \frac{(-1)^N}{N+x} + \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right)}_{= \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}} (-1)^n$$

converge uniformément vers 0 car $\left| \frac{(-1)^N}{N+x} \right| \leq \frac{1}{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

converge uniformément car normalement. En effet :

$$\sum \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} \leq \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

CQFD

On définit la fonction $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$

a) Trouver le domaine de définition de u

b) Etudier sa continuité, sa dérivabilité. On pourra montrer que u n'est pas dérivable en 0 en utilisant le Théorème des Accroissements Finis et la croissance de u'.

---

a) $x \geq 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ montre que $u(x)$ converge normalement pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x < 0$, on aura pour y suffisamment grand :

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $u(x)$ divergera aussi.

Ccl : $u(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, et par suite sera continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u_n'(x) = \dfrac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$. Si $x \in [a, +\infty[$, où $a > 0$ est fixé à l'avance,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$$

Comme $|e^{-na}| \leq \frac{1}{n}$ si $n > N$, on constate que $\left|\dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ puis la convergence normale de $\sum u_n'(x)$ sur $[a, +\infty[$.

(cf Hallak & Kallal)

Th : $\sum u_n(x)$ série de fonctions de $I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (I int. de $\mathbb{R}$)

Si - $\sum u_n(x)$ cv simplement sur I

- $\sum u_n'(x)$ cv uniformément sur I

Alors $u_n(x) \doteq \sum u_n(x)$ est dérivable sur I et $u'(x) = \sum u_n'(x)$

Ccl : Ce Th. mq $u(x) = \sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $u'(x) = \sum \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2}$.

* u n'est pas dérivable en 0

$\forall x > 0 \quad \exists c_x \in]0, x[\quad \frac{u(x) - u(0)}{x} = u'(c_x)$

(axe : 0, c_x, x)

Comme u' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u'(c_x) \leq u'(x)$ et :

$$\forall x > 0 \qquad \frac{u(x) - u(0)}{x} \leq u'(x)$$

Supposons par l'absurde que u soit dérivable en 0. Alors $\lim_{x \to 0_+} \frac{u(x)-u(0)}{x}$ existe. Notons-là ℓ. Pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{u(x) - u(0)}{x} \leq u'(x) \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2} \leq -e^{-Nx} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$$

montre que

$$\ell \leq -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$$

en passant à la limite pour x tendant vers 0_+. En faisant maintenant tendre N vers $+\infty$ dans cette inégalité :

$$\ell \leq -\infty$$

absurde.

CQFD

Soit f la fonction 2π-périodique coïncidant avec la fonction $x \mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$ sur l'intervalle $[0,2\pi[$.

a) f est-elle développable en série de Fourier pour toute valeur de x ? Cette série converge-t'elle uniformément sur tout intervalle.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire α, β, γ de sorte que cette série se réduise à $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

---

a) Soit f 2π-périodique et loc. intégrable. On sait que si f s'exprime comme la somme d'une série trigonométrique $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ et que cette série converge uniformément, alors :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin px = \pi b_p \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\cos px = \pi a_p$$

a_p et b_p, ainsi définis, s'appellent les "coefficients de Fourier trigonométriques" de f.

Ici f est C^1 par morceaux. Le Th. de Dirichlet montre que la série de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge simplement vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, ie si $f(\pi)=f(-\pi) \Leftrightarrow \alpha\pi^2+\beta\pi+\gamma = \alpha\pi^2-\beta\pi+\gamma \Leftrightarrow \beta=0$, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

(cf. Th. Dirichlet Ramis IV 3.5.4. 2% Co I et 3% Th)

b) Calculons $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos nx\,dx$ si $n\geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sin nx\,dx$$

Comme :

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos nx = \left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\sin nx = \frac{4\pi}{n^2}$$

$$\int_0^{2\pi} x\sin nx = \left[x \frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx = -\frac{2\pi}{n}$$

$$\int_0^{2\pi} x\cos nx = \left[x \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} x^2\sin nx = \left[x^2 \frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx = -\frac{4\pi^2}{n}$$

On trouve : $\begin{cases} a_n = \dfrac{4\alpha}{n^2} \\ b_n = -\dfrac{4\pi}{n}\alpha - \dfrac{2}{n}\beta \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n^2} \\ b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{4} \\ \beta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ puis $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}x \, dx$

$= -\dfrac{\pi^2}{3}$ si l'on choisit $\gamma = 0$.

$\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ convergera donc simplement vers $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}x$ si $x \in]0, 2\pi[$,

ou vers $\dfrac{f(0+) + f(0-)}{2} = 0$ si $x = 0$ (puisque $f(0+) = 0$ et $f(0-) = f(2\pi) = \dfrac{4\pi^2}{4} - \pi^2 = 0$)

On en déduit pour $x = 0$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

<u>NB</u> : On peut reprendre tout l'exercice avec f paire, 2π-périodique et telle que $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sur $[0, \pi]$. f sera alors continue sur $\mathbb{R}$ donc $\dfrac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ convergera uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a, b]$.

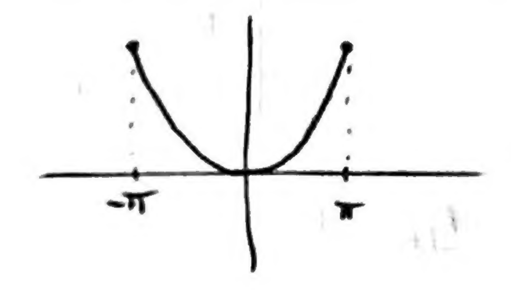
$-\pi$ π 3π

f C^1 par morceaux et continue

$\Downarrow$

La série de Fourier conv. unif. sur tout compact.

Développement en série de Fourier de la fonction f, 2π-périodique, définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.
En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



f est continue et C^1 par morceaux, donc sa série de Fourier converge uniformément, vers f, d'après le Théorème de Dirichlet.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

avec
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0 \quad \text{car } f(t) \text{ est paire.} \end{cases}$$

Calculons, pour $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[t^2 \frac{\sin nt}{n} \Big]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin nt}{n} \, dt \Big)$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \Big(\Big[t \frac{-\cos nt}{n} \Big]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos nt}{n} \, dt}_{=0} \Big)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \Big[t \cos nt \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} \big(\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n \big) = \frac{2}{n^2\pi} (-1)^n . 2\pi$$

$$\boxed{a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}}$$

(réf. Gostiaux III p297)

D'autre part :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

Or le Th de Dirichlet montre en particulier que, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nt = t^2}$$

Applications :

* Si $t = \pi$, $\cos n\pi = (-1)^n$ et :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2} = \pi^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

* Si $t = 0$, $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$

(inspiré du Serfati III 4.1 p 133)

a) Soit f la fonction paire, 2π-périodique, telle que

$$\forall x \in [0,\pi] \quad f(x) = \pi - x$$

Développer f en série de Fourier, puis en déduire la valeur de $S = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$

Écrire la formule de Parseval, et en déduire $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

b) Soit g impaire, 2π-périodique, telle que :

$$\forall x \in]0,\pi] \quad g(x) = \pi - x$$

Développer g en série de Fourier. Écrire la formule de Parseval et en déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

c) Retrouver la valeur de $\sum \frac{1}{n^2}$ grâce au a).

a) f est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. La série de Fourier de f converge donc normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

π

$-\pi$ 0 π

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

où
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, t \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt = 0 \quad \text{car } f \text{ est paire.}\end{cases}$$

* Si $n \neq 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[(\pi-t)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\, dt\right)$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(-(-1)^n + 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$$

* Si $n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi$

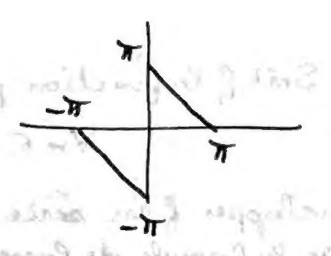
Ccl :
$$\boxed{f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0} \frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2}}$$

En particulier, pour $t = 0$: $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} S \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi^2}{8}}$

* La formule de Parseval est : $\frac{\pi^2}{2} + \sum_{p\geq 0}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$

d'où $\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$ (vérifié sur calculatrice)

b) $g(t)$ est impaire, C^1 par morceaux mais non continue sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de g convergera simplement vers la régularisée $g^*(t)$ $= \dfrac{g(t_+)+g(t_-)}{2}$.



$a_n = 0 \quad \forall n$ (car g impaire)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin nt\,dt \quad (n \geq 1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{\left[(\pi-t)\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}}_{\frac{\pi}{n}} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{-\cos nt}{t}\,dt}_{=0}\Bigg)$$

$$b_n = \frac{2}{n}$$

Ccl : $\boxed{g^*(t) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}}$

NB : Si $t \in]0,\pi]$, $\pi - t = \underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2}}_{\text{série de fcts paires convergeant uniformément}} = 2\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nt}{n}}_{\text{série de fcts impaires convergeant simplement}}$.

* La formule de Parseval s'écrit :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2\,dt \quad \text{où } g \text{ impaire} \Rightarrow |g(t)|^2 \text{ paire}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

d'où $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

c) On a $U \doteq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}U + S$ d'où $U = \frac{4}{3}S = \frac{\pi^2}{6}$.